2次元写像における 安定多様体と不安定多様体のふるまい[1]

山口喜博(帝京技術科学大学),谷川清隆(国立天文台)

2次元写像で記述される力学系を考え、安定多様体と不安定多様体がホモクリニック交差、接触、または漸近的な接触をしているときの構造を調べた。特にこれらの場合に不安定多様体がフラクタル的な構造を持つことを示した。

1. 逆写像が存在する2次元写像　$T\mu(X, Y)$

我々は逆写像が存在する2次元写像

$T\mu(X, Y): X_{n+1} = F\mu(X_n, Y_n),\ Y_{n+1} = G\mu(X_n, Y_n)$,

を考える。ここでμはパラメーターのセットで、関数F, GはX, YについてC^1級であるとする。変換のヤコビアン$J(X, Y) = \mathrm{Det}\, DT\mu(X, Y)$である。ここで扱うシステムは散逸系($0 < J(X, Y) < 1$)であるとする。以下では$\mu = \mu_c$で最初の直接的な接触、または最初の漸近的な接触が起るとする。つまり$\mu < \mu_c$では交差、接触はなく、$\mu > \mu_c$では交差が存在する。$\mu = \mu_c$にあるとする。以下この添字は省略する。

2. 定理と証明

<定理>　2次元写像　$T(X, Y)$に対して、不安多様体$W_u(O)$上の任意の点qの近傍$U_\varepsilon(q)$内にqを含む不安多様体の弧$w_u(q)$以外の不安多様体の弧が次の3つの場合に存在する。

1. ホモクリニック交差(Palisのλ−lemma),
2. 最初の直接的なホモクリニック接触、
3. 最初の漸近的なホモクリニック接触。

<証明>　1のケースは参考文献(2)を見られたし。ここでは3のケースを証明する。2の場合も同様に証明できる。周期nのサドルの一つを$u_1 = (0, 0)$と記す。u_1の近傍V(オーダー$-\varepsilon_0$)内ではHartman−Grobmanの定理より適当な変換Φで対角化できる(図1参照)。その結果我々は、X軸を安定多様体に、Y軸を不安定多様体にとる。変換Φによって$T^n(X, Y)$は

$T^n(X, Y) = (\lambda_s X + \phi_s(X, Y),\ \lambda_u Y + \phi_u(X, Y))$,

ただし　$1/\lambda_s > 1,\ \lambda_u > 1,\ \phi_s(0, 0) = \phi_u(0, 0) = 0$,

$\partial\phi_{s.u}(0, 0)/\partial X = \partial\phi_{s.u}(0, 0)/\partial Y = 0$

$\partial\phi_s(X, Y)/\partial Y\big|_{X=0} = 0,\quad \partial\phi_u(X, Y)/\partial X\big|_{Y=0} = 0.$

V内のX軸上の点Qにおいて不安定多様体が漸近接触をしているとすると、不安定多様体上の点でQに集積する点列Q_iをとれる(図1参照)。以後Q_iの運動に注目する。

初期値を$X_0 = X(Q_i) - X(Q),\ Y_0 = Y(Q_i)\ (X_0, Y_0 << 1)$とし、以下ではnjをjと、nj+nをj+1と略す。V内での写像関数は

$$X_{j+1} = \lambda_s X_j + [\partial\phi_s(X_j(Q), 0)/\partial X] X_j + [\partial\phi_s(X_j(Q), 0)/\partial Y] Y_j,$$

$$Y_{j+1} = \lambda_u Y_j + [\partial\phi_u(X_j(Q), 0)/\partial Y] Y_j.$$

ここで非線形項の中で最も大きな項のオーダーをkとする。V内のY軸上に任意の点P

をとりその近傍（オーダーδ）をとる。問題はこの近傍に軌道が入るかどうかである（図1参照）。入るための条件は

X方向：$0 < X_J(Q) + X_J < \delta$. ただし$X_J(Q) = \lambda_s{}^j X(Q) << 1$であるので無視できて、条件は　$0 < X_J < \delta$　である。

Y方向：$\delta_Y - \delta < Y_J < \delta_Y + \delta$. よって　$Y_J \simeq \delta_Y$。

V内での写像関数と上記の条件より軌道が点Pに近づける最小値δ_{MIN}が得られる。

$\delta_{MIN} = O(k\delta_Y / (\lambda_U - \lambda_S))$（注意：$\delta_Y = O(\varepsilon_0)$）.

ここで$k < (1 - \lambda_S / \lambda_U)^2$を満たすようにkをとる。これは　$k = O(\varepsilon_0) < (1 - \lambda_S / \lambda_U)^2 < 1$　を満たすような小さなVを用意することを意味する。よって

$\delta_{MIN} < O(\varepsilon_0 \Lambda / \lambda_U) < O(\varepsilon_0)$.　$(\Lambda = 1 - \lambda_S / \lambda_U)$.

つぎにVの大きさとしてX軸方向の大きさをδ_{MIN}程度にとり同じ議論を繰り返すことができる。そして新たなδ_{MIN}を順次きめることができる。最初のδ_{MIN}を$\delta_{MIN}{}^{(1)}$と書くとm回繰り返した後には　$\delta_{MIN}{}^{(m)} < O(\varepsilon_0 (\Lambda / \lambda_U)^m)$　となり、$m \to \infty$とすると、$\delta_{MIN}{}^{(m)} \to 0$を得る。これによって”V内のY軸の任意の点の近傍には不安定多様体の弧が存在する”事が示された。つぎに”不安定多様体の任意の点の近傍には不安定多様体の弧が存在する”に拡張する。図2に示したように不安定多様体の任意の点qの近傍には不安定多様体の弧が存在しないとする。ところが逆写像を何回か行うと$T^{-mn}q$はV内に入る（mは正の整数）。よって$T^{-mn}q$の周りに不安定多様体の弧が存在しない近傍$U\varepsilon'(T^{-mn}q)$をとることができる。これは上の結果に矛盾する。（証明終り）

我々の示した定理は3つのケースにおいて、不安定多様体がフラクタル構造をもっている事を示している。すなわち不安定多様体をいくら拡大しても微細構造が次から次に見えてくる事を示している。この事はモデルを使用した数値計算でも簡単に見ることができる。

最後に漸近的な接触の例を図3に示す

参考文献　1. Y.Yamguchi and K.Tanikawa (submitted to J.Math.Phys.)
2. J.Palis,Topology 8,385(1969).

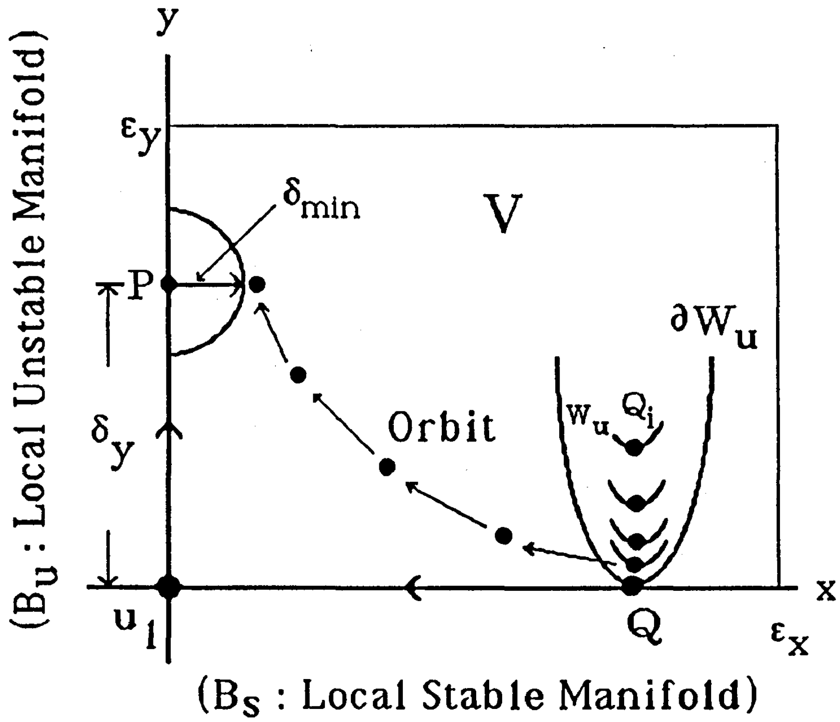

図1
B_S，B_UはV内での安定並びに不安定多様体。ε_x，ε_yは$O(\varepsilon_0)$。W_Uが　W_Uに集積している。ここにはPに最近接する軌道が描かれている。

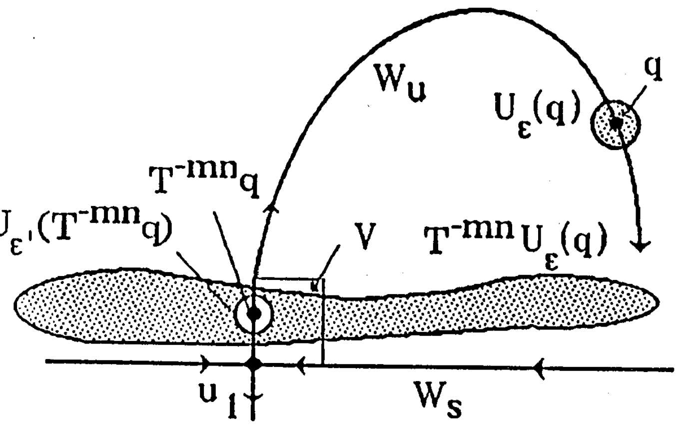

図2
qの近傍U_ε（q）を逆写像したものがT^{-mn} U_ε（q）で、一部がV内に入っている。

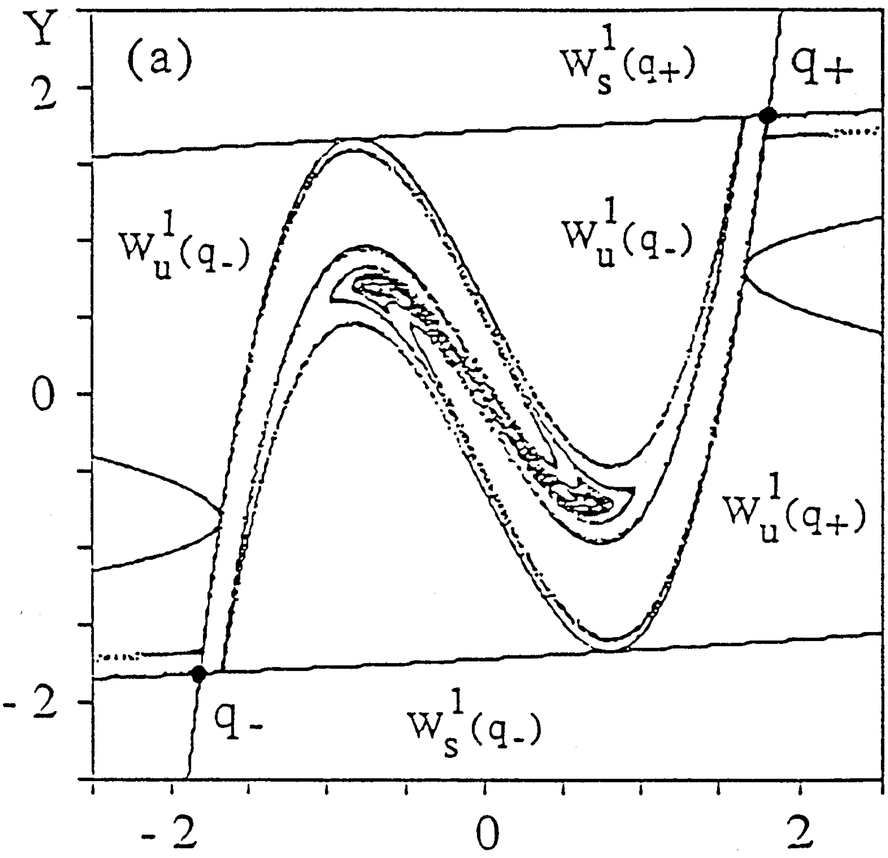

図3
用いた写像は　$X_{n+1}=Y_n$ 、$Y_{n+1}=-aY_n+Y_n{}^3-JX_n$ ：$J=0.4$，$a=1.8863$。Wu^1（q_-）（Wu^1（q_+））がWu^1（q_+）（Wu^1（q_-）に集積している。そしてWu^1（q_+）がWs^1（q_-）に接触し、Wu^1（q_-）がWs^1（q_+）に接触している。